ΘΕΩΡΗΜΑ GREEN:

1) Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C (y+\ln(x^2+1))dx + (2x+\ln(y^2+1))dy$$

οπου C: το σύνορο του χωρίου

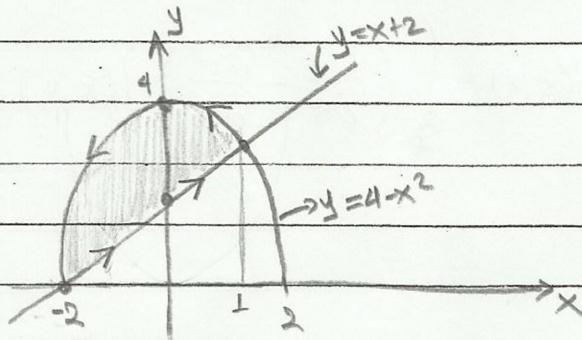
$D=\{(x,y):\ y+x^2\leq 4 \text{ και } y\geq x+2\}$

Το οποίο διαγράφεται κατά τη θετική φορά.

ΛΥΣΗ

$$\oint_C (y+\ln(x^2+1))dx + (2x+\ln(y^2+1))dy =$$

$$= \oint_{\partial D} (\underbrace{y+\ln(x^2+1)}_{P(x,y)},\ \underbrace{2x+\ln(y^2+1)}_{Q(x,y)})\, d(x,y) \quad (1)$$



$$D: \begin{cases} y+x^2\leq 4 \Rightarrow y\leq 4-x^2 \\ y\geq x+2 \end{cases}$$

Απο Θεώρημα Green έχουμε:

$$\oint_{\partial D} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d(x,y)$$

Επομένως, η σχέση (1) είναι

$$\oint_{\partial D} (y+\ln(x^2+1),\ 2x+\ln(y^2+1)) = \int_D (2-1)\, d(x,y) =$$

$$= \int_D 1\, d(x,y) \quad (2)$$

$$\left.\begin{cases} y=x+2 \\ y=4-x^2 \end{cases}\right| \Rightarrow x+2=4-x^2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x=1 \text{ ή } x=-2$$

Άρα, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ -2\leq x\leq 1 \text{ και } x+2\leq y\leq 4-x^2\}$

Συνεπώς, η (2) είναι:

$$\int_{-2}^{1}\int_{x+2}^{4-x^2} 1\, dy\, dx = \int_{-2}^{1} (-x^2-x+2)\, dx = \frac{9}{2}.$$

2) Να υπολογίσετε με τη βοήθεια διπλού ολοκληρώματος το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C F\cdot dr$ του διανυσματικού πεδίου $F(x,y)=(x^2y, xy^2)$ κατά μήκος της κλειστής καμπύλης C η οποία είναι το σύνορο του χωρίου:
$D=\{(x,y): x^2+y^2\le 4 \ ; \ x\le 0, \ 0\le y\}$ και διαγράφεται κατά τη θετική φορά

ΛΥΣΗ

Έστω $P(x,y)=x^2y$ και $Q(x,y)=xy^2$

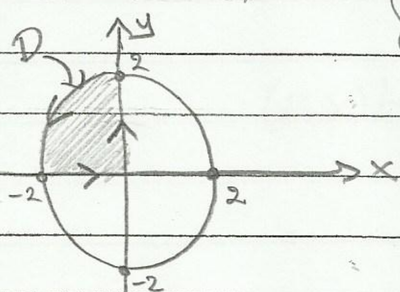
Έτσι $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=x^2$ και $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=y^2$

Από θεώρημα Green το επικαμπύλιο μετατρέπεται σε διπλό ολοκλήρωμα της C στον τόπο D αντίστοιχα.
Δηλαδή

$$\oint_C f(x,y)\,d(x,y) = \oint_C (x^2y, xy^2)\,d(x,y) = \int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d(x,y)$$

$$= \int_D (y^2-x^2)\,d(x,y) \quad (1)$$

Έχουμε $D = \begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ x\le 0 \text{ και } y\ge 0\end{cases}$



Έχουμε την εξίσωση:
$x^2+y^2=4 \Rightarrow y=\sqrt{4-x^2}$

Από, πολικές συντεταγμένες είναι γνωστό ότι:
$x=\rho\cdot\cos\theta$ και $y=\rho\cdot\sin\theta$

Άρα, εφαρμόζουμε το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών όπου ισοδύναμο χωρίο του D είναι το εξής:
$D^*=\{(\rho,\theta): 0\le\rho\le 2 \text{ και } \frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi\}$

Τότε η (1) θα γίνει:

$$\int_{D^*}(\rho^2\sin^2\theta-\rho^2\cos^2\theta)\det Dg(\rho,\theta)\,d\rho\, d\theta=$$

$$=\int_{D^*}(\rho^2\sin^2\theta-\rho^2\cos^2\theta)\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{pmatrix}d\rho\, d\theta=$$

$$=\int_{D^*}\rho^3(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\,d\rho\, d\theta=\int_0^2\rho^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\,d\rho\, d\theta=$$

$$=\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^2\cdot\left(-\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=0.$$